

Investigation and drawing of geometric patterns with heterogeneous rosettes based on Tony Lee's mathematical theories

Mahdi Azizi Hamedani

Ph.D. Candidate in Architecture, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Gholamhossein Memarian

Professor, Department of Architecture, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran (Corresponding Author)
E-mail: memarian@iust.ac.ir

Asghar Mohammadmoradi

Professor, Department of Restoration and Rehabilitation of Historic Buildings and Sites, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract

Geometric patterns in Islamic art and their mathematical aspects have been a subject of keen interest for researchers in this field. Individuals such as Tony Lee took significant strides in this direction with their manuscripts in 1967, and this work has continued to the present day. Composite geometric patterns with heterogeneous rosettes are a type of geometric design observed in historical sources such as the treatise *Risāla fī Tadākhul al- Ashkāl al- Mutashābiha wa al-Muwāfaqa* (On the Interlocking of Similar and Complementary Shapes) from the 9th century Hijri, as well as in historical structures across the Islamic world. These patterns have consistently captivated traditional artisans and contemporary researchers due to the diversity of rosettes and their geometric complexities. In this article, we aim to explore the mathematical relationship between two heterogeneous rosettes, as articulated by Tony Lee, and apply this understanding to the drawing of geometric patterns. To render these patterns, the polygonal-in-contact (PIC) edge method has been employed. This study reveals that implementing heterogeneous patterns—despite their mathematical compatibility for adjacency—requires distinct contextual frameworks for each, as they are inherently dissimilar. Furthermore, by analyzing the symmetry groups of geometric patterns, a field explored by mathematicians since 1977, the requisite symmetry group for knots with heterogeneous rosettes has been identified. The research demonstrates that mathematical analysis alone is insufficient to establish the similarity of these patterns; instead, differences in the required symmetry groups for rosettes become apparent through their practical illustration. In examining the drawing of interlace patterns (gereh) with heterogeneous rosettes, we demonstrated that a single symmetry logic applicable to ten-fold patterns cannot be generalized to other configurations. Instead, three types of symmetry frameworks—square, rectangular, and triangular—are required for rendering rosettes. For composite eight- and twelve-fold patterns, a quarter-square framework can be constructed by reflecting a right-angled triangle, mirroring the methodology used in ten-fold patterns. However, this logic does not extend to other composite patterns. For instance, (9-12) and (18-6) knots necessitate triangular symmetry frameworks, while (14-7) and (18-8) knots require adjustments to the background repetition and rosette positioning relative to one another. Additionally, similar to eight- and twelve-fold patterns, these rosettes can be re-rendered in symmetry frameworks with diverse configurations. This study investigates the mathematical relationship between heterogeneous rosettes and proportional symmetry frameworks in Islamic geometric patterns, grounded in Tony Lee's theories. Key findings reveal a specific mathematical correlation between the number of rosette vertices (m,n) and radial division parameters (p,q), expressed by the formula : $(1/2 = q/n + p/m)$ This formula enables the proportional design of heterogeneous rosettes while preserving geometric harmony. However, practical implementation demands alignment with the 17 crystallographic symmetry groups (e.g., p6m, p4m). Our work highlights that rendering patterns via mathematical logic within radial grid infrastructures (the standard method) requires modifications to rosette placement, background elements, and auxiliary motifs to achieve space-filling configurations. This principle also applies to patterns incorporating more than two rosettes.

Keywords: Gereh, composite geometric pattern, heterogeneous rosettes, polygonal-in-contact (PIC) method, Tony Lee

بررسی و ترسیم گره با شمسه‌های ناهمگون با تکیه بر نظریات ریاضی تونی لی*

مهدی عزیزی همدانی

دانشجوی دکتری معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

غلامحسین معماریان

استاد گروه معماری، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران (نویسنده مسئول)

E-mail: memarian@iust.ac.ir

اصغر محمد مرادی

استاد گروه مرمت، دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

نقوش هندسی در هنر اسلامی و جنبه ریاضی آن یکی از موضوع‌های مورد علاقه پژوهشگران این حوزه بوده است. افرادی مانند تونی لی با دست‌نوشته‌های خود در سال ۱۹۶۷ گام مهمی در این مسیر برداشته و تاکنون ادامه یافته است. این مقاله با تکیه بر نظریه‌های ریاضی لی، به بررسی رابطه بین شمسه‌های ناهمگون و واگیره‌های متناسب می‌پردازد. لی با فرمولی ریاضی ارتباط بین تعداد رئوس شمسه‌ها (M, N) و پارامترهای تقسیم شعاع‌ها (p, q) را بیان می‌کند. این رابطه امکان ترسیم نقوش ترکیبی با شمسه‌های متفاوت (مانند ۸-۱۶، ۹-۱۲، یا ۱۰-۱۰) را فراهم می‌کند. با این حال، پژوهش حاضر نشان می‌دهد که تحلیل صرفاً ریاضی برای ایجاد الگوهای جاپرکن (تکرارپذیر) کافی نیست و تطابق با گروه‌های تقارنی ۱۷گانه ضروری است. با استفاده از روش چندضلعی در لبه (PIC) و نرم‌افزار اتوکد، نقوشی مانند گره‌های ترکیبی هشت-دوازده و نه-دوازده ترسیم شده و مشکلات مرتبط با تکثیر آن‌ها در زمینه‌های مختلف (مربع، مستطیل، شش‌ضلعی) بررسی گردید. نتایج ترسیم گره‌های با رابطه ریاضی مشابه نشان می‌دهند که هر شمسه ناهمگون به گروه تقارنی خاصی نیاز دارد و نمی‌توان از منطق یکسان تقارنی گره‌های همگون (مانند گره ده) برای تمام ترکیبات استفاده کرد. در نهایت، این پژوهش تأکید می‌کند که طراحی نقوش ناهمگون نه تنها به فرمول‌های ریاضی، بلکه به درک عمیق از تقارن، زمینه تکرارپذیر، و سازگاری هندسی شمسه‌ها وابسته است.

کلیدواژه: گره، گره ترکیبی، شمسه‌های ناهمگون، روش چندضلعی در لبه، تونی لی

* این مقاله برگرفته از رساله دکتری مهدی عزیزی همدانی با عنوان «تدوین روشی بهینه در فهم نقوش هندسی» است که با راهنمایی دکتر غلامحسین معماریان و دکتر اصغر محمد مرادی در دانشکده معماری و شهرسازی دانشگاه علم و صنعت ایران در حال است.

مقدمه

نقوش هندسی ترکیبی با شمشه‌های ناهمگون یکی از موضوعاتی است که در نظر استادکاران و پژوهشگران معاصر مورد توجه قرار گرفته و درمورد ویژگی‌های شمشه‌ها و نحوه ترسیم و خصوصیات ریاضی آن بحث بررسی شده است (Bodner, 2012; Bonner, 2017; Broug, 2013; Necipoğlu, 2017). درحالی‌که در سنت گره چینی، عموماً از شمشه‌های همسان استفاده می‌شد. چالش استفاده از گره‌های ناهمگون در آثار استادکاران و طومارهای سنتی مشهود است، اما تاکنون تحلیل نظام‌مندی از منطق پنهان این ترکیبات ارائه نشده است. ابنیه تاریخی ایران مملو از نقوش هندسی است. یکی از اولین شاهکارهای این حوزه محراب مسجد جامع برسیان است که بر کتیبه آن تاریخ ساخت ۴۹۸ هجری قمری ذکر شده است. گره‌های ترکیبی هشت و شش و گره دوازده و هشت و گره شانزده و هشت مشاهده می‌شود.

هنرمندان و استادکاران ایرانی در بررسی نقوش هندسی ترکیبی توضیحاتی را ارائه نداده‌اند؛ لیکن نقوش ترکیبی را در کتب نگاشت‌شده آن‌ها می‌توان مشاهده کرد. به نظر می‌رسید استادکاران به جهت نشان دادن توانایی خود در ترسیم این نقوش سعی به کشف و ابداع نقوش جدید کرده‌اند که یکی از این عرصه‌ها ترسیم نقوش با شمشه‌های ناهمگون به صورت ترکیبی بوده است. استادکاران متعددی مانند لرزاده (رئیس‌زاده، ۱۳۹۸)، شعرباف (۱۳۸۵)، علی‌اکبر حلی (۱۳۶۵)، محمود ماهرالنقش (۱۳۶۱)، حسین زمرشیدی (۱۳۶۵)، محمدگلپار (۱۳۹۹) و جواد شفایی (۱۳۹۹) نسبت به طراحی نقوش هندسی ترکیبی دست برده‌اند. تونی لی^۱ در یکی از دست‌نوشته‌های خود بر نوع رابطه ریاضی بین شمشه‌ها پرداخته است و این نوشته‌ها مبنای بسیاری از تحقیقات ریاضی نقوش هندسی قرار گرفته است. در این تحلیل ریاضی با محدود کردن دو گره در دو راس یک مثلث روابط مثلثاتی بین شمشه‌ها کشف شده و مبنای تحلیل انواع نقوش هندسی قرار گرفته است. در این مقاله می‌کوشیم تا این روش بررسی و مشخص شود که چگونه می‌توان نسبت به ترسیم این نقوش اقدام کرد. تعدادی از نقوش هندسی ترکیبی با زمینه مثلثاتی مشابه که توسط لی معرفی و رابطه ریاضی آن بیان شده است، بررسی شده و واگیره مناسب و گروه تقابلی متناسب با آن برای ترسیم توسط نگارنده یافت شده و نشان داده می‌شود که تمامی نقوش هندسی ترکیبی با فرمول ریاضی مشابه در ترسیم هندسی هم از یک قاعده مشابه پیروی نمی‌کنند. و با یک روش یکسان نمی‌توان نقش هندسی جابجایی که یک سطح را با تکرار پر کند به دست آورد. سپس با بررسی گروه‌های تقارنی و انواع پر تکرار آن در نقوش هندسی اسلامی سعی می‌شود ویژگی هر کدام تبیین کرد. با استفاده از ترسیم انجام‌شده از گره‌ها و تطابق آن با گروه‌های تقارنی گره‌ها با شمشه ناهمگون و ام‌الگره مقایسه می‌شوند و مشخص می‌گردد چه تفاوتی میان این دو دسته از گره‌ها وجود دارد.

پیشینه تحقیق

نخستین تلاش‌ها برای تحلیل ریاضی نقوش اسلامی در قرن نوزدهم با کارهای اوون جونز^۲ آغاز شد (Bonner, 2017). او در کتاب «قواعد تزئین»^۳ (۱۸۵۶)، او با بررسی الگوهای الحمرا، نشان داد که این نقوش بر پایه تقسیمات دایره، تقارن‌های چرخشی و انعکاسی، و نسبت‌های هندسی مانند نسبت طلایی ساخته شده‌اند. ژول بورگوان^۴، ریاضی‌دان و معمار فرانسوی، در کتاب «هنر عربی»^۵ (۱۸۷۳)، با ترسیم دقیق بیش از ۲۰۰ طرح اسلامی، روش‌های هندسی مانند «تقسیم دایره به ۱۲ بخش برای ایجاد ستاره‌های شش پر» یا «استفاده از شبکه‌های چندضلعی» را تشریح کرد. وی نشان داد که چگونه ترکیب چندضلعی‌های منتظم و شمشه به ایجاد الگوهای بی‌پایان منتج می‌شود. هانکین در سال ۱۹۲۵ مجموعه از نقوش هندسی را با روش چندضلعی ترسیم کرد که تاکنون این روش توسط پژوهشگران استفاده می‌گردد. نقوش هندسی با دو شمشه متفاوت

در این کتاب مشاهده می‌شود (Hankin, 1925). دسته‌بندی نقوش هندسی با پالایش و ساماندهی در ربع آخر قرن بیستم با انتشار چندین کتاب درخصوص نقوش هندسی از جمله کیت کریچلو (Critchlow, 1976) و داوید وید و عایشه پارمان و السعید (El-Said & Parman, 1976) شروع شد تحلیل‌هایی که عموماً مبتنی بر شناخت نقوش هندسی با کیهان‌شناسی و منطق ریاضی بود و پایه آن شیوه توجیه‌کننده ترسیم نقوش هندسی نبود و اکثر نقوش بر مبنای شمسه یکسان بوده و در بعضی مطالعات متأخر شامل نظم دادن به نقوشی است که به طور پیچیده در شبکه ایزومتریک و متعامد تکرار می‌شوند (Critchlow, 1976).

لی در دست‌نوشته خود در سال ۱۹۶۷ م. به تحلیل ریاضی از نقوش هندسی پرداخته است که تاکنون مرجع و مبنای پژوهش‌هایی در مورد نقوش هندسی ترکیبی و رابطه ریاضی بین اشکال هندسی قرار گرفته است. او در این رساله به رابطه بین شمسه‌ها و نسبت ریاضی بین آن‌ها پرداخته و تعداد شمسه‌هایی را که با یک سری پیش فرض می‌توان ترسیم کرد در جداول مدون نموده است (Lee & August, 2014).

ریاضی‌دانان با به‌کارگیری نظریه گروه‌های تقارن، چارچوبی نظام‌مند برای تحلیل نقوش اسلامی ایجاد کردند. سید عباس و عامر شاکر سلمان در سال ۱۹۵۵ در کتاب همارستگی نقوش هندسی سعی نمودند ۲۴۸ نقش هندسی را در رده‌های تقارن بلورشناسی تقسیم نموده و نظام کاملی از آرایه‌های در اختیار خود ارائه دهند. ادیت کرامول^۶ در کتاب «تقارن در هنر اسلامی» (1989)، با تطبیق ۱۷ گروه تقارن مسطح (مطابق بلورنگاری)، نشان داد که اکثر نقوش اسلامی در چهار دسته اصلی «چرخشی»، «انعکاسی»، «انتقالی» و «ترکیبی» جای می‌گیرند (Cromwell, 2009). در دو دهه اخیر، ریاضی‌دانان و مهندسان با استفاده از نرم‌افزارهای محاسباتی، به بازسازی و تحلیل عمیق‌تر نقوش اسلامی پرداخته‌اند. برایان ویچمن^۷ پایگاه داده tilingsearch.org را ایجاد کرد که با گردآوری بیش از ۲۶۰۰ الگو، امکان شناسایی تقارن‌ها، شمارش شمسه و مقایسه روش‌های ساخت را فراهم می‌کند. این پایگاه نشان می‌دهد که نقوشی مانند «شمسه ۳۲ پر» در معماری مملوکی، با تقسیم دایره به ۱۶ بخش مساوی و اتصال نقاط میانی ساخته شده‌اند. دیوید وید^۸ نشان می‌دهد روش‌های ترکیبی مانند «محاسبات مثلثاتی» و «شبیه‌سازی دستی» را برای تحلیل الگوها به کار گرفت. برای نمونه، در فصل ۱۶ کتاب، اثبات شده که هنرمندان مملوک برای ساخت شمسه ۱۶ پر، از تقسیم دایره به ۱۶ قوس برابر بدون محاسبات پیچیده زاویه‌ها استفاده می‌کردند (Wichmann & Wade, 2017). بونر در کتاب نقوش هندسی اسلامی در بخش مفصلی بر بررسی نقوش هندسی غیر نظام‌مند^۹ و ترسیم تعداد زیادی از زیرساخت‌های شعاعی پرداخته است که می‌تواند مبنای طراحی قرار گیرد (Bonner, 2017).

امروزه، پژوهشگرانی مانند کریم صفا^{۱۰} و بیتا حاجبی با استفاده از نرم‌افزارهای GeoGebra و MATLAB، به مدل‌سازی نقوش اسلامی بر پایه معادلات دیفرانسیل و توابع تناوبی می‌پردازند. این مطالعات نشان می‌دهند که بسیاری از نقوش تاریخی، مبتنی بر تقریب‌های هندسی ساده (مثل تقسیم دایره به بخش‌های مساوی) هستند، نه محاسبات دقیق مثلثاتی. همچنین، پژوهش‌های اخیر در حوزه گرافیک کامپیوتری، مانند پروژه «Islamic Pattern Generator»، امکان خلق الگوهای جدید با حفظ اصول تقارن و تکرار اسلامی را فراهم آورده‌اند (Berglund & Kaplan, 2021; Hajebi et al., 2016; Hajebi & Hajebi, 2024).

پژوهش‌هایی در مورد روش‌های ترسیم نقوش هندسی نیز سعی در فهم و بازترسیم نقوش هندسی با استفاده از گروه‌های تقارن و مقایسه روش‌های استادکاران و پژوهشگران معاصر و ریاضی‌دانان کرده‌اند و با مقایسه تطبیقی مزیت هر کدام از شیوه‌ها را بیان داشته‌اند (امین‌پور و همکاران، ۱۳۹۴؛ دهشتی و همکاران، ۱۳۹۸؛ شیروانی، ۱۴۰۱؛ نژاد ابراهیمی و عزیزپور شوبی، ۱۴۰۲). حتی در یکی از مقالات گره ام‌الگره ده به پنج روش مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و مزایا و معایب هر روش بیان گردیده است (ولی بیگ و همکاران، ۱۳۹۶). در این

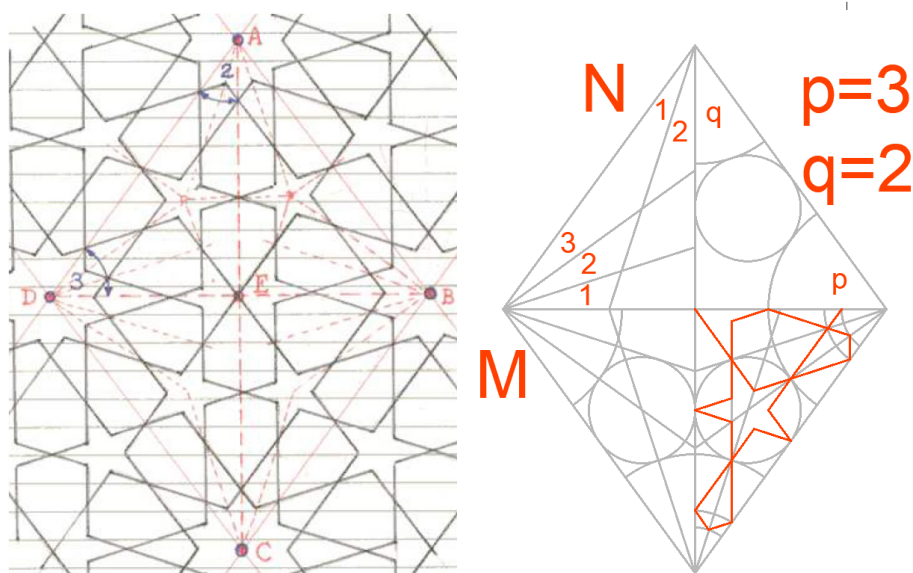
پژوهش از میان شیوه‌های چندضلعی و شبکه‌ای و نقطه اتصال و فلکی و حساب، با عنایت به استفاده لی در ترسیم و تحلیل نقوش هندسی از شیوه چندضلعی در لبه (چندضلعی) استفاده شده است. پژوهش‌های انجام شده در حوزه رابطه ریاضی نقوش هندسی مفصل بوده و تعدادی از آن‌ها بررسی گردید. موضوع رابطه شمس‌های ناهمگون یکی از موضوعاتی است که در منابع کمتر بدان پرداخته شده و در این بین نوع رابطه شمس‌ها و گروه‌های تقارنی هفده‌گانه در آن‌ها موضوعی است که همچنان فضای بررسی و پژوهش را دارد؛ لذا سعی شده است این جنبه در مقاله مورد مذاقه قرار گیرد.

روش تحقیق

روش این تحقیق براساس مطالعات کتابخانه‌ای و استدلال منطقی است. در این تحقیق با مراجعه کتابخانه‌ای گردآوری داده‌ها و مطالعات نظری انجام شده و جداول روابط ریاضی بین شمس‌های ناهمگون لی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. روابط ریاضی کشف شده توسط لی برای پیاده‌سازی با نرم‌افزار اتوکد انجام شده است، موضوعی که در پژوهش‌های گذشته مشاهده نگردیده بود. شیوه مورد استفاده در این پیاده‌سازی چندضلعی در لبه است که توسط هانکین پیشنهاد داده شده و تاکنون برای ترسیمات هندسی مورد استفاده قرار گرفته است. سپس این ترسیمات و مشکلات آن در گسترش نقوش هندسی مورد بررسی قرار گرفته و هرکدام براساس یکی از گروه‌های تقارنی توسعه داده شده و با بیان انواع گروه‌های تقارنی این نقوش تقسیم‌بندی شده‌اند. اعتبارسنجی نتایج از طریق بازیابی هندسی در اتوکد و تطبیق با جداول مرجع انجام گرفت. این پژوهش با تلفیق روش‌های دیجیتالی، تحلیل تقارن، درکی عمیق‌تر از همگرایی هنر اسلامی و ریاضیات ارائه می‌دهد.

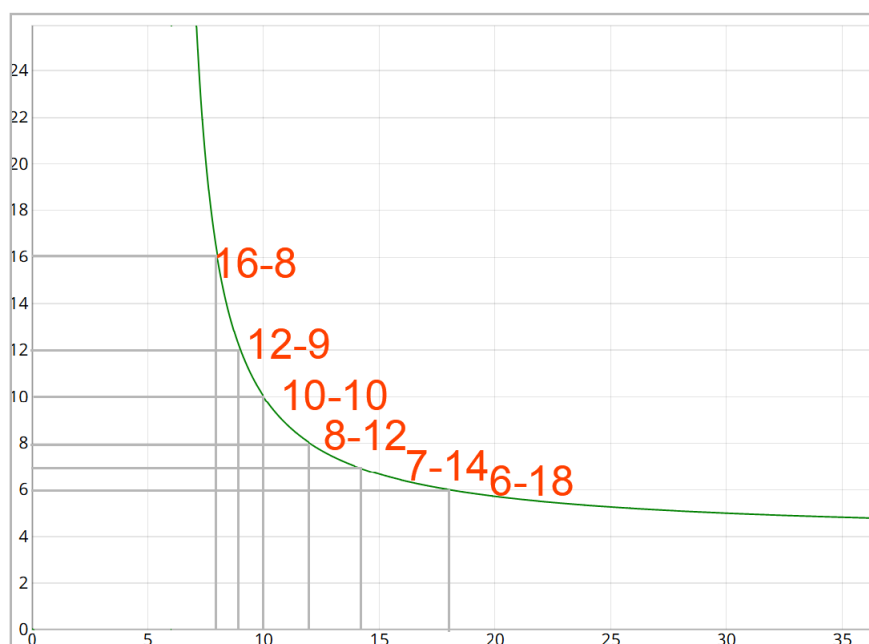
بررسی رابطه ریاضی دو شمس به روش تونی لی

لی به‌عنوان پایه‌گذار تحلیل ریاضی نقوش هندسی شناخته شده و رابطه‌ای که او تبیین کرده در سایر منابع تأیید و مورد استفاده و توسعه قرار گرفته است (Wichmann & Wade, 2017). لی با بررسی رابطه ریاضی بین دو شمس و تعداد شعاع‌های هریک از شمس‌ها رابطه‌ای را در یک مثلث قائم‌الزاویه شکل می‌دهد که در دو رأس آن شمس قرار گرفته است. طبق فرمول، لوزی تشکیل شده از چهار مثلث قائم‌الزاویه امکان تکرار در صفحه دو بُعدی را داشته باشند باید از رابطه مقابل پیروی کنند. $M, N \frac{1}{2} = \frac{q}{N} + \frac{p}{M}$ تعداد رئوس شمس هستند مانند گره ده و p, q تعداد تقسیم شعاع‌ها که نصف ترنج را در بر می‌گیرد. براساس این فرمول ریاضی با پیش‌فرض تعداد شعاع‌ها در این مثلث می‌توان شمس‌های ناهمگون را که امکان رابطه به‌صورت عدد صحیح دارند مشخص نمود. گره ده شناخته‌ترین حالت قرارگیری در این مثلث است که یک از شمس‌ها سه قسمت و دیگری دو قسمت از تقسیم بیست‌گانه شمس ده را در دو گوشه مثلث قائم‌الزاویه دارا هستند. در شکل N, M برابر ده هستند و جمع دو کسر رابطه برابر یک دوم $\frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10}$ خواهد شد.



شکل ۱. ترسیم لوزی با چهار مثلث درام الگوه ده تند به همراه شکل دست نوشته لی

این رابطه می‌تواند در شمشه‌های ناهمگون نیز تکرار شود. با p, q دو و سه می‌توان تعدادی از این شمشه‌ها شناسایی کرد که لی نمودار جدول یک پیاده‌سازی کرده، لیکن نسبت به ترسیم این نقوش اقدام نکرده است. اگر این فرمول و احتمالات آن بر روی نمودار M, N پیاده‌سازی شود یک نمودار هزلولی به دست خواهد آمد که تعداد محدودی از شمشه‌ها می‌توانند با یکدیگر براساس منطق بالا ارتباط برقرار کنند و عدد صحیح باشند.



شکل ۲. نمودار گره‌های ترکیبی (محور عمودی تعداد رئوس شمشه N و محور افقی تعداد رئوس شمشه M)

این نمودار نشان می‌دهد اگر فرض ۲ و ۳ را برابر p, q قرار دهیم (همان چیزی که در گره ده آن شاهد هستیم)، فقط یک حالت دو شمسه برابر خواهند بود که شمسه ده و ده است و در حالت‌های دیگر شمسه‌های مشخصی را می‌توانیم ترسیم کنیم که برابر جدول (۱) خواهد بود. این جدول نشان می‌دهد چرا شمسه‌های هشت و دوازده و یانه و دوازده در ترسیمات نقوش هندسی کاربرد فراوانی داشت است. زیرا مبنای تقسیمات آن برای پرکردن یک فضای دو بعدی همان لوزی با تقسیمات ۲ و ۳ خواهد بود. در این جدول شمسه ۹ و ۱۱ هم می‌توان نوشت که به صورت تقریبی رابطه ریاضی برقرار خواهد شد $(\frac{1}{p} \cong \frac{49}{99} = \frac{1}{9} + \frac{3}{11})$.

جدول ۱. تعداد رئوس شمسه با مقادیر ممکن برای M و N با فرض $3=P$ و $2=q$

شمسه	تعداد رئوس شمسه							
M	۷	۸	۹	۱۰	۱۲	۱۴	۱۸	۳۰
N	۲۸	۱۶	۱۲	۱۰	۸	۷	۶	۵

در صورت یکسان بودن دو شمسه در رابطه $M=N \frac{1}{2} = \frac{q}{n} + \frac{p}{m}$ شده و رابطه بین p, q شکل می‌گیرد که برابر $2q = M + 2p$ خواهد بود. این رابطه حالات ممکن برای این دو شمسه را نشان می‌دهد. اگر M برابر چهار یا شمسه چهار لنگه باشد این دو عدد یک می‌شوند که در لوزی برابر زاویه ۴۵ درجه خواهد بود. اگر مثلاً شمسه شانزده باشد این عدد ۴ بوده و برابر ۱۱، ۲۵ درجه برابر هر بخش p, q می‌شود. اگر فرض ۲ و ۳ برابر p, q تغییر یابد و یا شمسه‌ها به مانند فرض بالا یکسان نباشند، تعداد نقوش هندسی که می‌تواند در مثلث ترسیم شود تنوع زیادی پیدا می‌کند. ساده‌ترین حالت $p, q = 1$ خواهد بود که شمسه چهار ایجاد شده و در گسترده‌ترین حالت دو عدد ۶ و ۴ بوده که شمسه ۱۰۸ و ۹ را ایجاد می‌کند.

*Numerical Values, in the form (M, N)**
** see notes on p.22 when p=q.*

(p,q) rhomb size	No of Solns.																
1,1	2 (3)	6,3	4,4		3,6												
2,1	4	12,3	8,4		6,6			5,10									
3,1	6	18,3	12,4	10,5	9,6		8,8			7,14							
4,1	5	24,3	16,4		12,6			10,10			9,18						
5,1	6	30,3	20,4		15,6	14,7			12,12			11,22					
6,1	8	36,3	24,4	20,5	18,6		16,8	15,10		14,14						13,26	
2,2	3 (9)	20,5	12,6	8,8	6,12	5,20											
3,2	8	30,5	18,6	14,7	12,8	10,10	9,12	8,16	7,28								
4,2	6	40,5	24,6	16,8	12,12	10,20	9,36										
5,2	8	50,5	30,6	20,8	18,9	15,12	14,14	12,24	11,44								
6,2	10	60,5	36,6	28,7	24,8	20,10	18,12	16,16	15,20	14,28						13,52	
7,2	8	70,5	42,6	28,8	22,11	21,12	18,18	16,32								15,60	
3,3	5 (9)	42,7	24,8	18,9	15,10	12,12	10,15	9,18	8,24	7,42							
4,3	10	56,7	32,8	24,9	20,10	16,12	14,14	12,18	11,22	10,30	9,54						
5,3	12	70,7	40,8	30,9	25,10	22,11	20,12	16,16	15,18	14,21	13,26	12,36	11,66				
6,3	12	84,7	48,8	36,9	30,10	24,12	21,14	20,15	18,18	16,24	15,30	14,42				13,78	
7,3		98,7	56,8	42,9	35,10	28,12	26,13		21,18	20,30							
8,3		112,7															
4,4	4 (7)	72,9	40,10	24,12	16,16	12,24	10,30	9,72									
5,4	10	90,9	50,10	30,12	26,13	20,16	18,18	15,24	14,28	12,42	11,88						
6,4	12	108,9	60,10	44,11	36,12	28,14	24,16	20,20	18,24	16,32	15,40	14,56				13,104	
7,4																	
8,4																	
9,4																	

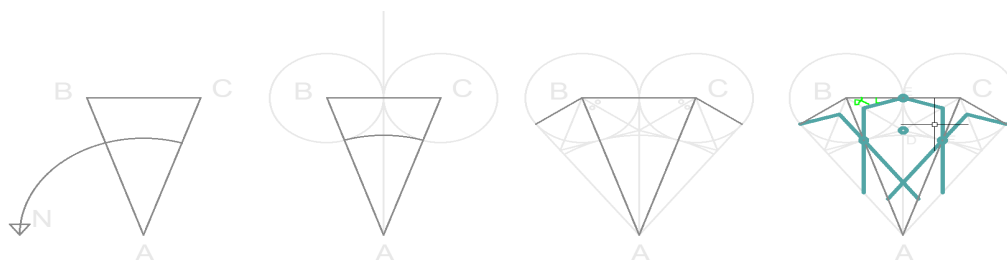
شکل ۳. جدول انواع گره‌های ترکیبی با فرض q, p های متفاوت از دست‌نوشته لی

نحوه ترسیم گل هندسی به روش استاندارد (چندضلعی در لبه)

این روش "مبتنی بر شناخت شمس و عنصر شش ضلعی احاط شده در اطراف آن است. در میان ستاره‌های استفاده شده به عنوان نشانه و الگو (motive) در هنرهای هندسی اسلامی یک الگو به طور مشخص می‌تواند عنوان اسلامی را یکدک بشد. این الگو را گل هندسی می‌نامند که مشابه و همانند گل واقعی یا گل‌های کاغذی است که در حلقه بیرونی آن گلبرگ‌های قابل شمارشی مرکز ستاره یا مرکز گل را احاطه کرده‌اند. این تعریف غیر تاریخی ولی سازگار اجازه می‌دهد تعریفی برای توسعه نقوش هندسی به دست بیاید (Lee & August, 2014). یک نوع شبکه زیرساخت توسط هانکین به عنوان وسیله‌ای برای ترسیم نقوش هندسی اسلامی با اندازه‌های متناسب گل‌های هندسی به کار گرفته شد (Hankin, 1925). هانکین به طور رسمی از هیچ‌یک از ابزار پیشنهادی خود برای ترسیم الگوهای ستاره اسلامی را نام‌گذاری نکرد، اما لی با وام گرفتن عبارت هانکین، از

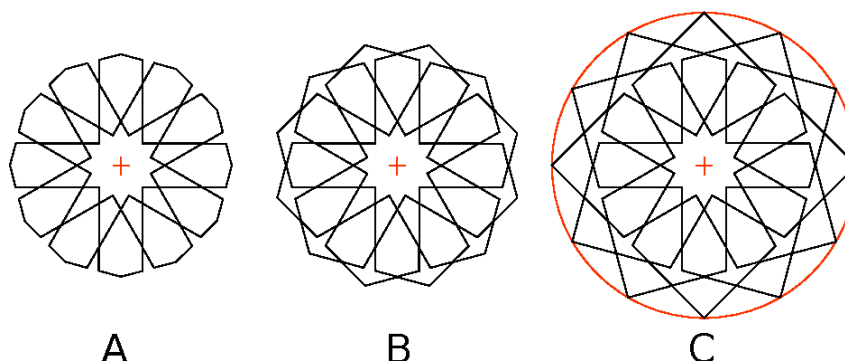
روش لبه مشترک^{۱۲} نام برد. و مخفف PIC را به آن داد [۵]. اگر نقش هندسی حاوی دو شمشه یا گل هندسی باشد که هر دو با استفاده از روش «استاندارد»^{۱۳} ترسیم شده‌اند، ساده‌ترین روش برای اتصال آن‌ها اشتراک لبه است. ممکن است به جای لبه، این فاصله را چندضلعی‌های معمولی که آن‌ها را محدود می‌کند - که «چندضلعی‌های محدودکننده» نیز نامیده می‌شوند.

روش استاندارد ترسیم گل هندسی^{۱۴} به صورت زیر است. در این روش با تعیین زاویه محل برخورد گلبرگ^{۱۵} با چندضلعی منتظم (ضلع BC) سایر زوایای آلات شمشه مشخص می‌شود. با ترسیم نیم سازه‌های هریک از اضلاع مثلث که قطعه‌ای از چندضلعی منتظم است در نقطه d تقاطع حاصل می‌شود و با ترسیم زاویه X شمشه و ترنج و گلبرگ یا شش شل ترسیم می‌شود.



شکل ۴. ترسیم گره به روش استاندارد نقطه E محل تعیین زاویه آلفاست

در صورت امتداد و پرتو داشتن خطوط انتهایی گلبرگ‌ها می‌توان حالت کامل‌تری از یک گل مسطح را مشاهده کرد. این گل مسطح دوازده در شکل (۲) دیده می‌شود.

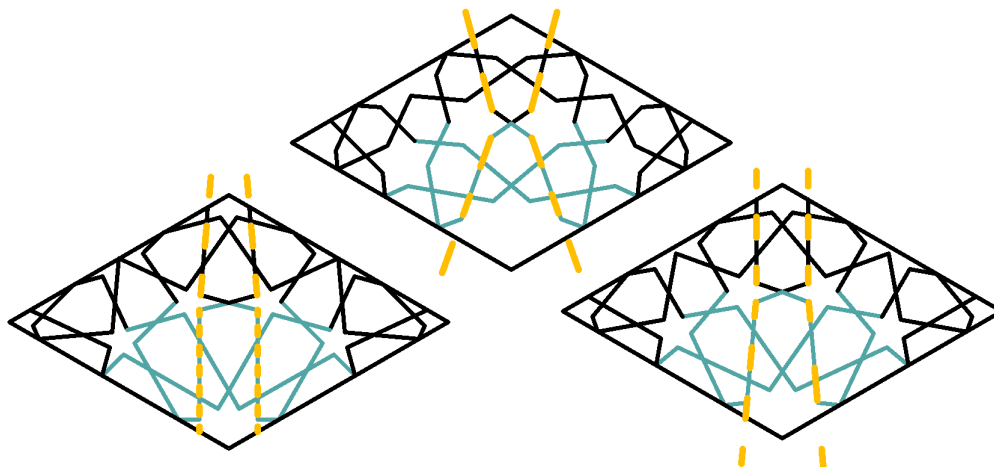


شکل ۵. نقش اول بدون امتداد پرتوهای گلبرگ (petel) که استادکاران آن را آلت شش می‌نامیدند و نقش دوم یک مرحله امتداد و نقش سوم با دو مرحله امتداد خطوط گلبرگ قابل مشاهده است

منبع: Lee & August, 2014

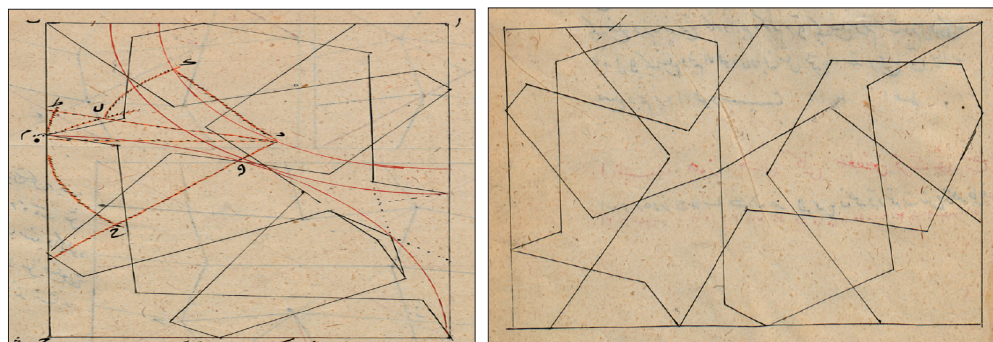
گل هندسی با توجه به داشتن گلبرگ‌های هندسی امکان شکل‌گیری یک نقش کامل را در زمینه دایره و مربع می‌دهد که تعداد زیادی در نقوش هندسی در این واگیره‌ها ترسیم شده است. باید توجه داشت که اتصال گره‌ها با شمشه‌های مختلف به یکدیگر در صورتی که اصول ذکر شده رعایت گردد بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند و در صورت تغییر زوایای گره اول گره دوم تغییر شکل می‌دهد. در گره‌های حاوی دو نوع شمشه، یعنی شمشه با تعداد رؤوس متفاوت، اگر از اصولی مشابه ساختار استاندارد استفاده شود، شمشه‌ها بر دیگری تأثیر می‌گذارند. به عنوان مثال، در گره ترکیبی با شمشه نه و دوازده، اگر شمشه نه با گلبرگ‌های موازی رسم، شمشه ۱۲ دارای گلبرگ‌های همگرا^{۱۶} خواهد بود (در شکل هفت راست). از طرف دیگر، اگر شمشه ۱۲ با

گلبرگ‌های موازی کشیده شود، شمسه نه دارای گلبرگ‌های واگرا^{۱۳} خواهد بود (شکل هفت - چپ). در هر دو مورد، یک ساختار استاندارد منجر به یک جفت «گلبرگ» بینابینی می‌شود که مشابه گلبرگ‌های شمسه نه است (شکل هفت - وسط). می‌توان این گره را با هر دو نوع شمسه به صورت موازی رسم کرد، اما در این مورد می‌توان نتیجه گرفت که از یک ساختار استاندارد استفاده نشده است، حتی اگر اندازه‌های نسبی دو نوع شمسه به درستی رعایت شده باشد.



شکل ۶. سه حالت ترسیم گره نه و دوازده با تغییر همگرایی و واگرایی گره نه و دوازده

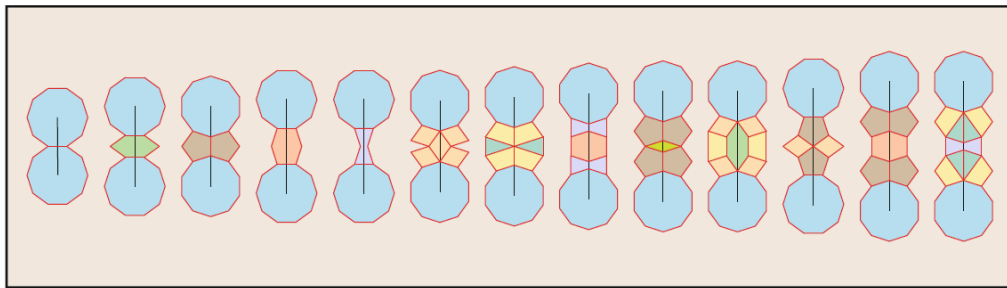
رابطه دو شمسه در صورت فاصله گرفتن از یکدیگر می‌تواند با انواع آلات هندسی پر شود. کاسترا در مقاله خود انواع حالات رابطه بین دو شمسه ده را بررسی کرده است (Castera, 2016). این ویژگی می‌تواند در سایر گره‌ها نیز مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۷. شکل ص ۳۴۱ فی تداخل الاشكال برای گره ترکیبی ۱۲ و ۱۰ و دو حالت آن



شکل ۸. سه حالت قرارگیری شمسه‌های ده با زاویه و فاصله متفاوت از کاسترا



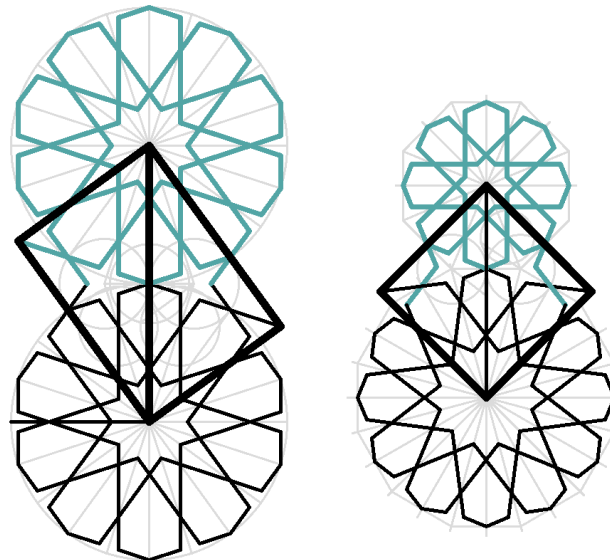
شکل ۹. انواع حالت رابطه بین دو گره ده

منبع: Bonner, 2017

ترسیم گره‌های ترکیبی به روش گل هندسی (استاندارد)

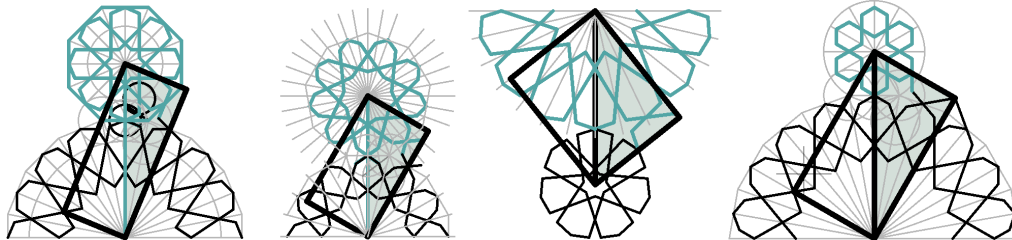
مطابق جدولی که لی معرفی کرده است نقوش هندسی با رابطه p, q مشابه نقوش هندسی با شمشه‌های (۳۰-۵) و (۶-۱۸) و (۷-۱۴) و (۸-۱۲) و (۱۰-۱۰) و (۱۲-۹) و (۱۶-۸) و (۲۸-۷) قابل ترسیم است. این نقوش توسط او و یا سایر منابع ترسیم نشده است. تحلیل لی برای رابطه دو شمشه در یک مثلث و ارتباط آن صرفاً کارایی تحلیل ریاضی داشته و برای تولید نقوش هندسی و تکثیر آن مبتنی بر ۱۷ گروه تقارنی کارایی مناسبی ندارد. این امر به علت این است که مثلث تشکیل شده با انعکاس و یا چرخش امکان پر کردن سطح را نمی‌دهد و دقیق‌تر اینکه سطح را با زمینه می‌توان پر کرد لیکن آلات نقش هندسی در لبه‌ها نمی‌توانند قرینه شده و در یک مرکز شمشه‌های متفاوتی قرار می‌گیرند.

اگر این رابطه ریاضی را مبنا قرار داده و مشابه گره ام الگه نقوش هندسی ترسیم گردد، مشاهده می‌شود منطق گروه تقارنی گره ده قابل استفاده نیست. مثلی که در شکل (۱۰) ترسیم شده است توسط بونر دامنه بنیادی (Bonner, 2017) و عباس ناحیه زایا (Abas & Salman, 1994) نام‌گذاری نموده‌اند. در گره ده مثلث زایا با چرخش ۱۸۰ درجه از میانه وتر می‌تواند تبدیل به مستطیلی شود که نقش کامل هندسی در آن ترسیم شود. از میان شمشه‌های جدول ذیل تنها شمشه ۸-۱۲ و ۱۰-۱۰ می‌توانند با منطقه گروه تقارنی مشابه ترسیم شوند.



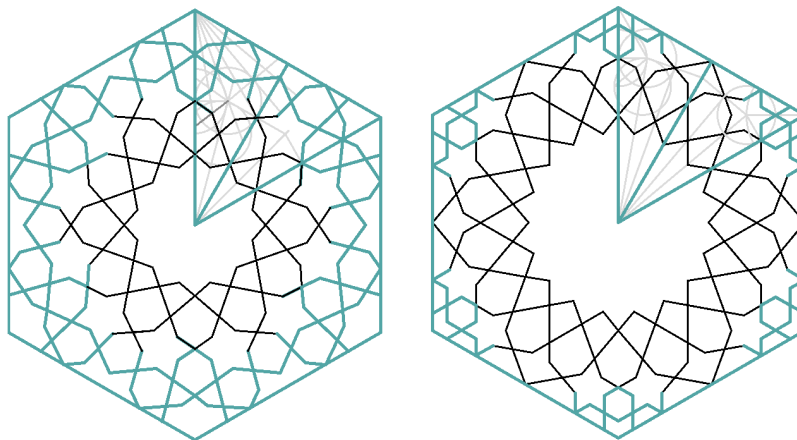
شکل ۱۰. ترسیم گره هشت و دوازده به روش استاندارد و مشخص نموده واگیره قابل تکرار با خطوط ضخیم

این الگو هنگامی که در ساختار دیگر نقوش هندسی پیاده‌سازی می‌گردد با توجه به ابعاد شمشه‌ها قابل استفاده نخواهد بود. سایر نقوش هندسی با منطق مشابه قابل ترسیم نخواهد بود که در شکل ذیل نشان داده می‌شود. در شکل از راست به چپ گره‌های هشت و شانزده و گره نه و دوازده و گره چهارده و هفت و گره هیجده و شش نمی‌توانند با منطق گره ده ترسیم شوند.



شکل ۱۱. ترسیم گره‌های ترکیبی دیگر و عدم تطبیق زمین با انعکاس بازتابی به عنوان زمینه قابل تکرار

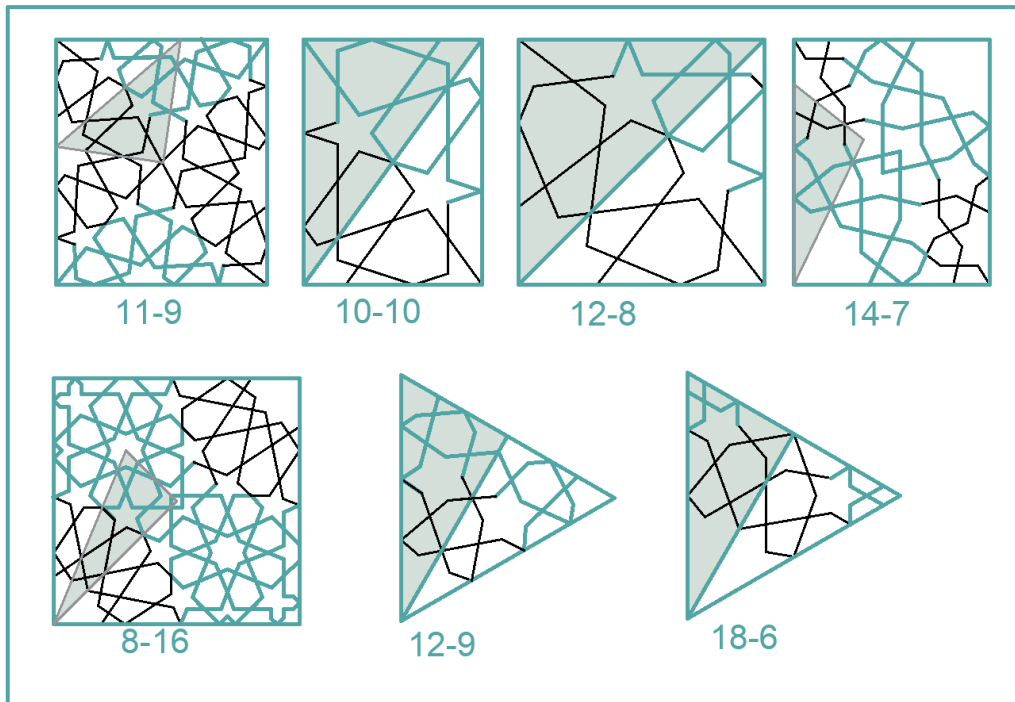
با تغییر منطق گروه تقارنی در این گره‌ها می‌توان گره ترسیم نمود لیکن مثلی که با سایه پرشده در شکل مشخص شده و با چرخش 180° درجه از میانه وتر تکثیر نخواهد شد. در گره‌هایی که گروه تقارنی شش و ضربی از آن را دارند می‌توان از زمینه شش ضلعی استفاده نمود. در این نقوش مثلث دارای زاویه 15° درجه و ضرایب آن است به‌طور مثال گره نه و دوازده مثلی با زوایای 30° و 60° دارد. برای ترسیم از تقارن محوری از ضلع بزرگ‌تر مثلث هاشورخورده استفاده می‌گردد و سپس با چرخش 60° درجه نقش در زمینه شش ضلعی به دست خواهد آمد (شکل ۱۲).



شکل ۱۲. ترسیم گره شش و هیجده در زمینه مثلث و چرخش شش باره جهت تکمیل زمینه قابل تکرار

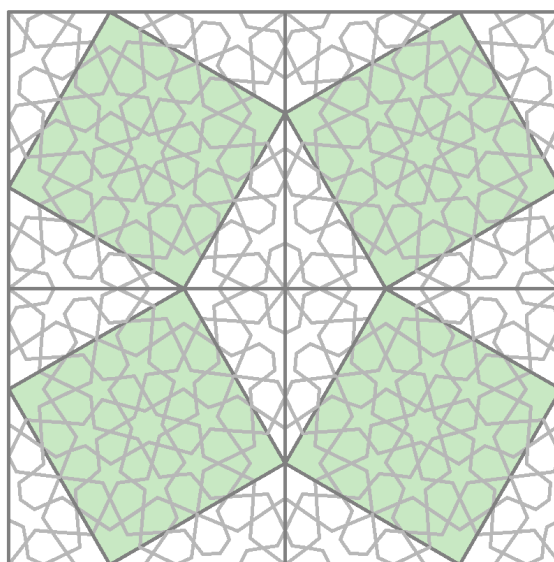
در زمینه‌هایی که امکان استفاده از هیچکدام از این دو منطق را ندارند به نظر می‌رسد زمینه جاپرکن^{۱۸} یا قابل تکرار وجود ندارد. لیکن می‌توان با تغییرات منطقی این دوگانه شمشه را در یک زمینه مستطیل پیاده‌سازی نمود. گره هفت و چهارده به علت زوایای تشکیل شده در ترسیم شمشه استاندارد نمی‌تواند در یک زمینه مستطیل که شمشه‌ها در رئوس آن قرار گرفته‌اند ترسیم شود و در صورت قرارگیری در مستطیل می‌تواند با تغییر قرارگیری هفت ضلعی در یکی از شعاع‌های چهارده ضلعی در زمینه مستطیل به روش انتقال تکثیر شود. گره هشت و شانزده با امتداد ضلع کوچک‌تر می‌تواند یک مثلث قابل بازتاب محوری بسازد و یا با تقارن محوری ضلع بزرگ‌تر می‌تواند یک نقش در زمینه هشت ضلعی را ایجاد نماید که با سایر اشکال منتظم قابل

گسترش است. گره یازده و نه نیز به علت مشابهت منطق ریاضی می تواند در این جدول قرار گیرد. این دو شمسه نیز به مانند گره چهارده و هفت نمی توانند در چرخش محوری و تریک مستطیل را ایجاد کنند اما با استفاده از محور تقارن یازده ضلعی به عنوان ضلع مستطیل و تکرار آلات می توان در زمینه گسترش یابد. این امر نیاز به دستگردان کردن متخصری دارد که در کلیت شکل آلات تأثیری نخواهد داشت (شکل ۱۳).



شکل ۱۳. ترسیم نقوش هندسی ترکیبی جدول یک توسط نگارنده و دسته بندی زمینه مربع و مستطیل و مثلث و نمایش ناحیه بنیادی هر زمینه

اگر از گروه های تقارن ۱۷ گانه خارج شویم تعدادی از گره های ترکیبی می توانند نظم شبهه تناوبی داشته باشند. مثلاً گره ترکیبی هشت و شانزده می تواند در اشکال شبهه تناوبی تکثیر شود. و یا با اشکال متفاوتی در زمینه مانند ترکیب مربع و هشت ضلعی واگیره را تشکیل دهند که گره هشت و شانزده و یا واگیره مربع و مثلث با گره ترکیبی هشت و دوازده می توان گره ترکیبی را شکل داد.



شکل ۱۴. ترسیم گره ترکیبی هشت و دوازده در زمینه ترکیبی مربع و مثلث متساوی الاضلاع

گروه‌های تقارنی در نقوش هندسی

پوشاندن سطح دوبعدی توسط انواع متفاوتی از اشکال و با حالات تقارنی متفاوت امکان‌پذیر است. اگر انتقالات، چرخش‌ها، انعکاس‌ها یا انعکاس‌های لغزشی روی یک شکل یا نقش اعمال شوند و ظاهر جسم تغییر نکند، آن جسم از ویژگی‌های تقارنی برخوردار است. **گروه تقارن** یک شکل، مجموعه تمام تقارن‌ها، یعنی چرخش‌ها، انعکاس‌ها، انتقالات و انعکاس‌های لغزشی است که با اعمال شدن روی شکل، باعث می‌شوند جسم طوری به نظر برسد که گویی موقعیت آن بدون تغییر باقی مانده است (Abas & Salman, 1994).

دانشمندان در اواخر قرن ۱۹ مشخص کردند صرفاً ۱۷ حالت تقارن برای این کار وجود دارد. نقوش هندسی دوبعدی در نقش مبنا و یا زمینه می‌توانند با انتقال و دوران و بازتاب و لغزش تکثیر شوند لذا به آن‌ها اشکال جابجایی می‌گویند. پولیا^{۱۹} و اشرا (1924) اولین افرادی هستند که از دیدگاه بلورشناسی به بررسی نقوش هندسی پرداختند. سید عباس و عامر شاکر در کتاب هم‌آراستگی نقوش هندسی به تفصیل به بررسی و دسته‌بندی نقش مبنا در نقوش هندسی براساس گروه‌های تقارنی پرداخته‌اند (شاکرسلیمان، ۱۳۸۳). همچنین مطالعات امیل مکویکی^{۲۰} در مورد شناسایی تقارن در هنر و نه صرفاً نقوش هندسی مفصل است (Makovicky, 1986). گنزالز^{۲۱} توانسته است به وسیله برنامه رایانه‌ای امکان تشخیص و تفکیک نقوش هندسی در این هفده گروه را فراهم کند (González et al., 2004). دهقان‌نژاد در پژوهشی در روش‌های ریاضی موجود برای بررسی نقوش هندسی و جایگاه آن در هنر کاشیکاری اسلامی و ایرانی نسبت به دسته‌بندی گره‌های هندسی در اساس تفاوت رئوس گره اقدام نموده است (دهقان‌نژاد، ۱۳۷۸). الجمالی در پژوهش خود به وسیله گروه‌های تقارن و تعداد چرخش در رأس هر چندضلعی و با حداقل رساندن تعداد تکرار اتصال خطوط تمامی نقوش هندسی را در سه دسته سه‌گانه و شش‌گانه و چهارگانه تقسیم‌بندی کرده است (Aljamali & Banissi, 2004). کرومول در مورد گروه‌های تقارنی مورد استفاده در نقوش هندسی و نحوه به‌کارگیری آن نکاتی را در مقاله خود بیان کرده و دسته‌بندی جدیدی را ارائه داده است (Cromwell, 2016).

تعداد زیادی از نقوش هندسی که بر مبنای گروه تقارن $P4g$ و $P4M$ است را می‌توان در زمینه مستطیل ترسیم کرد، به گونه‌ای که شمس در مرکز قرار بگیرد. PMM دارای چهار مرکز تقارن است. گروه CMM دارای چهار نوع

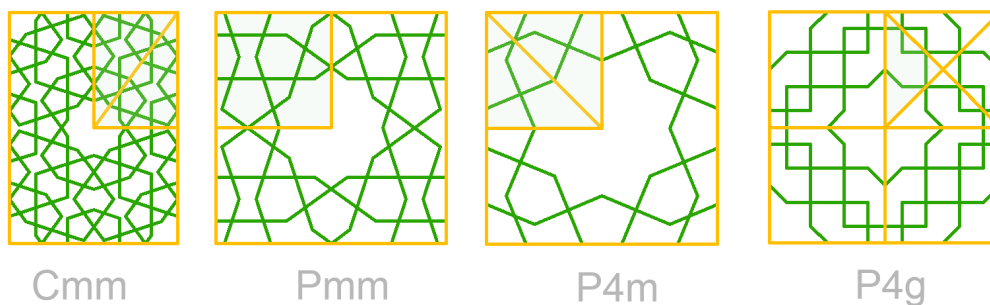
مرکز چرخش ۱۸۰ است و می‌تواند شمسه در مرکز ترسیم شود. مطابق جدولی که برایان ویچمن تهیه کرده است از لحاظ درصدی ۵۶.۴ نقوش هندسی را می‌توان با زمینه مستطیل یا مربع با شمسه مرکزی ترسیم نمود. گروه پرتکرار دیگر P6M است. که ۲۲ درصد را شامل می‌شود. گره‌ها با شمسه شش و دوازده در این گروه تقارنی جای دارند که می‌توان با ترسیم گره در شش ضلعی منتظم شمسه را در مرکز شش ضلعی ترسیم نمود. نمونه هرکدام از این نقوش در پایین ترسیم شده است.

جدول ۲. دسته‌بندی نقوش هندسی در ۱۷ گروه تقارنی و درصد فراوانی آن‌ها در ۲۶۰۰ نقش هندسی

Group (orbital) (standard)		Percentage (out of 1545)	Example Figure
*442 ($p4m$)	$p4m$	47.8	1
*632 ($p6m$)	$p6m$	22.2	2
2*22 (cmm)	cmm	9.5	3
4*2 ($p4g$)	$p4g$	6.4	4
632 ($p6$)	$p6$	4.2	5
*2222 (pmm)	pmm	3.9	6
442 ($p4$)	$p4$	2.9	7
3*3 ($p31m$)	$p31m$	1.2	8
2222 ($p2$)	$p2$	0.6	9
333 ($p3$)	$p3$	0.3	10
** (pm)	pm	0.3	11
22* (pmg)	pmg	0.3	12
*333 ($p3m1$)	$p3m1$	—	13
*x (cm)	cm	—	14
O ($p1$)	$p1$	—	15
22x (pgg)	pgg	—	16
xx (pg)	pg	—	17

منبع: <http://www.tilingsearch.org>

گره ده به عنوان یکی از پرتکرارترین نقوش هندسی اکثراً در PMM و گروه CMM قرار گرفته‌اند و می‌توان از زمینه مستطیل با چهار بازتاب برای ترسیم آن‌ها استفاده کرد. لی نیز در دست‌نوشته خود با تحلیل انواع گره‌ها نشان داده است تعداد زیادی از نقوش هندسی را می‌توان با قراردادن یک ستاره در بین دو شمسه با رئوس متفاوت ترسیم نموده که این منطق نیز در گره CMM با چهار بازتاب قرار می‌گیرند.



شکل ۱۵. ترسیم چهار گروه تقارنی پرتکرار در نقوش هندسی از راست به چپ گره هشت زهره و گره هشت قناس موربانه و گره ده گیوه و سرمدان در زمینه مربع و گره وه سرمدان قناس

لی در تحلیل خود نشان می‌دهد گره‌های ترکیبی با شمس‌های متفاوت می‌تواند از قواعد مشابه گره ام الگروه ده استفاده نمایند و درواقع در تعداد شعاع‌های خارج شده مشابه گره ده باشند. این مبنا که در گروه تقارنی Cmm قابلیت توسعه و تنوع بخشی دارد. با بررسی جداول می‌توان جدول ذیل را برای نقوش هندسی بازترسیم شده و گروه تقارنی آن‌ها تعیین نمود. هرکدام از این گره‌های ترکیبی در یکی از گروه‌های تقارنی قرار می‌گیرند با آگاهی از نوع گروه تقارنی و همچنین محل قرارگیری شمس‌ها درزمینه قابل تکرار می‌توان شمس‌ها را درکنار یکدیگر پیاده‌سازی کرد و به صرف رابطه ریاضی ترسیم گره‌ها قابل انجام خواهد بود. در انتها جدول معرفی شده تعداد رئوس شمس‌های ناهمگون به همراه گروه تقارنی ترسیمات انجام شده توسط نگارنده مشخص شده است. این جدول نشان می‌دهد لزوماً زمینه و واگیره و ناحیه بنیادین مشابه منجر به مشابهت گروه تقارنی نیست. زمینه گره‌ها در دو گره مربع است لیکن در هرکدام از یک شیوه خاص برای ترسیم و تکمیل زمینه استفاده شده است. یکی به مانند ام الگروه قابل تکثیر است و دیگری این امکان را ندارد. لذا در جمع‌بندی باید گفت رابطه زمینه گره و گروه تقارنی و رابطه مثلثاتی گره‌ها امری پیچیده است که صرفاً با تحلیل یک جنبه نتایج کاملی حاصل نخواهد شد.

جدول ۳. گروه تقارنی ترسیم پیشنهادی در مقاله و تفاوت آن

شمسه	تعداد رئوس شمس‌ها							
	M	۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۲	۱۴
N	۶	۷	۸	۱۱	۱۰	۱۲	۱۶	۲۸
گروه تقارنی	P6M	CMM	p4g	PM	CMM	p4g	PMM	گروه تقارنی
زمینه کامل	شش ضلعی	مستطیل	مربع	شش ضلعی	مستطیل	مربع	مستطیل	شش ضلعی

نتیجه‌گیری

این پژوهش به بررسی رابطه ریاضی بین شمس‌های ناهمگون و واگیره‌های متناسب در نقوش هندسی اسلامی با تکیه بر نظریات لی پرداخته است. بررسی‌ها نشان می‌دهند که رابطه ریاضی بین تعداد رئوس شمس‌ها (M,N) و پارامترهای تقسیم شعاع‌ها (p,q) وجود دارد، که با فرمول $\frac{1}{2} = \frac{q}{n} + \frac{p}{m}$ بیان می‌شود. فرمول ریاضی به‌تنهایی امکان ترسیم شمس‌های ناهمگون با حفظ تناسب هندسی را فراهم نمی‌دهد و اجرای عملی این نقوش نیازمند تطابق با گروه‌های تقارنی هفده‌گانه است. در این مقاله نشان دادیم ترسیم نقوش با منطق ریاضی در شبکه زیرساخت شعاعی با دوایر شمس‌ها (روش استاندارد) نیاز به تغییراتی در محل قرارگیری شمس‌ها و زمینه و آلات مورد استفاده دارد تا بتوان آن‌ها را به اشکال جا پرکن قابل تکثیر مطابقت داد و این منطق در گره‌های بیش از دو شمس نیز قابل بررسی است. در بررسی ترسیم گره‌ها با شمس‌های ناهمگون نشان دادیم منطق تقارنی گره ده قابل استفاده برای سایر گره‌ها نیست و سه گونه واگیره مربع و مستطیل و مثلث برای ترسیم شمس‌ها نیاز است. در گره ترکیبی هشت و دوازده می‌توان به مانند گره ده با بازتاب مثلث قائم الزاویه زمینه یک چهارم مربع را ترسیم نمود ولی در سایر گره‌های ترکیبی این منطق برقرار نیست و گره‌های (۹-۱۲) و (۱۸-۶) در واگیره مثلث و گره (۱۴-۷) و (۱۸-۸) با تغییراتی در زمینه قابل تکرار و محل قرارگیری شمس‌ها نسبت به یکدیگر قابل تکرار هستند. همچنین این شمس‌ها به مانند گره هشت و دوازده می‌توانند در واگیره‌ها با حالت‌های متنوعی بازترسیم شوند.

رابطه زیرساخت شعاع‌ها به عدد ثابت (p, q) ثابت سه و دو منتهی نمی‌گردد و می‌توان این اعداد متغیر باشد. در صورت تغییر این دو عدد شمس‌هایی متنوع می‌توانند مطابق فرمول گفته شده در ابتدا فرض گردند. اما ترسیم زیرساخت شعاعی آن‌ها به مانند نمونه‌های ترسیم شده در مقاله چالش بزرگی است که به راحتی قابل حل نیست. رابطه شمس‌های ناهمگون موضوعی است که گستره وسیعی دارد و می‌تواند در آثار تاریخی باقی مانده و مکتوبات تاریخ مورد پیگیری قرارگیرد و پژوهش‌های آتی در این زمینه را شکل دهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Tony Lee
2. Owen Jones
3. Gramer Ornament
4. Jules Bourgoïn
5. Arabesque
6. Edith Cromwell
7. Brian Wichmann
8. David Wade
9. Nonsystematic Patterns
10. Karim Safa
۱۱. در روش استاندارد با ترسیم سه دایره محاطی مماس بر یکدیگر از مرکز نقوش هندسی گل هندسی خطوط گره هندسی با سه حالت همگرا و اگر و موازی قابل ترسیم است. گل هندسی به طور کلی باید به طور منظم تشکیل شود، یعنی مراکز ستارگان محیطی باید روی رئوس چندضلعی‌های منتظم باشند و ستاره مرکزی باید یک ستاره منتظم یا متساوی‌الاضلاع باشد، اما لزوماً نیازی به این نیست که ستاره‌های محیطی ستاره‌ها منتظم باشند ولی باید هر دو ستاره محیطی و مرکزی دایره‌ای محاط شوند.
12. Polygons-In-Contact
13. Standard Method
14. Rosette
15. Petel
16. Convergent
17. Divergent
۱۸. زمینه یا نقش جاپرکن امکان آن را دارد که به بازتاب و تقارن و انتقال یک سطح دو بعدی را مفروش کند.
19. Poly& Esher
20. Makovsky
21. Gonzales

فهرست منابع

- امین‌پور، احمد، اولیا، محمدرضا، ابویی، رضا و حاجبی، بیتا (۱۳۹۴). پیشنهاد مدلی برای ترسیم گره در تزیینات وابسته به معماری اسلامی. نامه معماری و شهرسازی، ۸(۱۵)، ۵۷-۷۸.
- حلی، سید علی اکبر (۱۳۶۵). گره و قوس‌ها در معماری اسلامی. قم: چاپخانه مهر.
- دهشتی، مجید، خوش‌نژاد، مهدی و منان‌رئیزی، محمد (۱۳۹۸). روشی نو در ترسیم نقش مایه‌های گره ده تند و کند. نگره، ۵۱(۱۴)، ۵۳-۶۴.
- رئیس‌زاده، مهناز (۱۳۹۸). احیای هنرهای از یاد رفته معماری اسلامی (جلد اول). تهران: مولی.
- زمرشیدی، حسین (۱۳۶۵). گره چینی در معماری اسلامی و هنرهای سنتی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- شاکرسلیمان، عامر (۱۳۸۳). هم‌آراستگی در نگاره‌های اسلامی (مترجم: مریم آقاربیع). تهران: به نشر.

- شعرباف، اصغر (۱۳۸۵). گره و کاربرندی. تهران: انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور.
- شنفایی، جواد (۱۳۹۹). هنر گره‌سازی در معماری و درودگری (دوره ۳ جلدی). تهران: انجمن مفاخر فرهنگی.
- شیروانی، محمدرضا (۱۴۰۱). «حسباً» شیوه ترسیم نقوش هندسی اسلامی مراکش در مقایسه با شیوه شعاعی ایرانیان. مبنای نظری هنرهای تجسمی، ۱۴(۷)، ۲۸-۳۹.
- گلیار، محمد (۱۳۹۹). دفتر گره: روش طراحی گره‌ها در معماری اسلامی ایران. تهران: میراث اهل قلم.
- ماهرالنقش، محمود (۱۳۶۱). کاشی‌کاری در ایران دوره اسلامی. تهران: شرکت افست.
- نژاد ابراهیمی، احد و عزیزپور شوبی، عارف (۱۴۰۲). کاربرد لایه پنهان در توسعه گره‌چینی بر مبنای مستندات تاریخی در ایران. مبنای نظری هنرهای تجسمی، ۱۸(۱)، ۱۱۶-۱۰۱.
- ولی‌بیگ، نیما، نظریه، نوشین و رهروی، ساناز (۱۳۹۶). مطالعه مقایسه‌ای گره مادر در گستره شیوه‌های ترسیم با ارائه و معرفی شیوه‌ای نامکتوب. تاریخ علم، ۱۵(۲)، ۲۵۱-۲۷۴.
- Abas, S.J., & Salman, A.S. (1994). *Symmetries Of Islamic Geometrical Patterns*. World Scientific.
- Aljamali, A.M., & Banissi, E. (2004). Grid Method Classification of Islamic Geometric Patterns. In M. Sarfraz (Ed.), *Geometric Modeling: Techniques, Applications, Systems and Tools* (pp. 233-254). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1689-5_13
- Berglund, J., & Kaplan, C. (2021). *Beyond the Great 96*. <https://isohedral.ca/other/Beyond96/>
- Bodner, B.L. (2012). From Sultaniyeh to Tashkent Scrolls: Euclidean Constructions of Two Nine- and Twelve-Pointed Interlocking Star Polygon Designs. *Nexus Network Journal*, 14(2), 307-332. <https://doi.org/10.1007/s00004-012-0111-y>
- Bonner, J. (2017). *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Construction* (1st ed.). Springer. <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=5a5e5059510cc44d7305c0fe537e07ae>
- Broug, E. (2013). *Islamic Geometric Design* (1st ed.). Thames & Hudson.
- Castera, J.M. (2016). Persian Variations. *Nexus Network Journal*, 18(1), 223-274. <https://doi.org/10.1007/s00004-015-0281-5>
- Critchlow, K. (1976). *Islamic patterns: An analytical and cosmological approach*. Schocken Books.
- Cromwell, P. (2009). The search for quasi-periodicity in Islamic 5-fold ornament. *The Mathematical Intelligencer*, 31, 36-56. <https://doi.org/10.1007/s00283-008-9018-6>
- Cromwell, P.R. (2016). Modularity and Hierarchy in Persian Geometric Ornament. *Nexus Network Journal*, 18(1), 7-54. <https://doi.org/10.1007/s00004-015-0280-6>
- El-Said, I., & Parman, A. (1976). *Geometric Concepts in Islamic Art*. Dale Seymour Pubn.
- González, J.M., Albert, F., Carretero, C., & Gomis, J.M. (2004). Structural description of textile and tile pattern designs using image processing. *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition*. <https://doi.org/10.1109/ICPR.2004.1334175>
- Hajebi, B., & Hajebi, P. (2024). Improving recognition of deteriorated historical Persian geometric patterns by fusion decision methods. *Neural Computing and Applications*, 36(20), 11809-11831. <https://doi.org/10.1007/s00521-024-09932-3>
- Hajebi, B., Aminpoor, A., Olia, M.R., & Abouei, R. (2016). Drawing Parametric Polygonal Pointed Star Patterns. *Soffeh*, 26(1), 109-124. https://soffeh.sbu.ac.ir/article_100303_en.html
- Hankin, E.H. (1925). *Drawing of Geometric patterns in Saracenic Art*. <http://archive.org/details/HankinSaracenicArt>
- Lee, T., & August, A.S. (2014). *The Geometric Rosette: Analysis of an Islamic decorative motif*. <https://www.semanticscholar.org/paper/The-Geometric-Rosette-%3A-analysis-of-an-Islamic->

Lee-August/29f33d97a25d88ff187585277edb8d4f208d152a

- Makovicky, E. (1986). Symmetrology of art: Coloured and generalized symmetries. *Computers & Mathematics with Applications*, 12(3-4), 949-980. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(86\)90435-9](https://doi.org/10.1016/0898-1221(86)90435-9)
- Necipoğlu, G. (2017). The Arts of Ornamental Geometry. In *Persian Compendium on Similar and Complementary Interlocking Figures*. Brill. <https://brill.com/display/title/32181>
- Wichmann, B., & Wade, D. (2017). *Islamic Design: A Mathematical Approach*. Birkhäuser Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-69977-6>

COPYRIGHTS

Copyright for this article is retained by the author(s), with publication rights granted to Journal of Architecture and Urban Planning. This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



نحوه ارجاع به این مقاله

عزیزی همدانی، مهدی؛ معماریان، غلامحسین و محمد مرادی، اصغر (۱۴۰۴). بررسی و ترسیم گره با شمشه‌های ناهمگون با تکیه بر نظریات ریاضی تونی لی. *فصلنامه علمی نامه معماری و شهرسازی*. ۱۸(۴۸)، ۱۳۶-۱۵۴.

DOI: 10.30480/AUP.2025.5799.2250

URL: https://aup.journal.art.ac.ir/article_1436.html